Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова
Физический факультет

Курсовая работа
Джинсовская неустойчивость в теории векторного комплексного поля

Выполнил студент 206 группы
Совит К. М.

Научный руководитель
кандидат физ.-мат. наук Нугаев Э. Я.

Москва, 2022

Содержание

1 Скалярное комплексное поле с потенциалом 4-го порядка

Пусть лагранжиан такого поля в нерелятивистской теории имеет вид

$$\mathcal{L} = i\psi^*\dot{\psi} - \frac{|\nabla\psi|^2}{2m} - V,$$

где $V = \dfrac{\lambda}{2}(\psi\psi^*)^2$.

После варьирования действия по ψ^* получается уравнение

$$-\frac{\partial_i\partial^i\psi}{2m} + \lambda\psi^2\psi^* = i\dot{\psi}. \qquad (1)$$

1.1 Конденсатное решение

Найдем решение, не зависящее от координат, т.е. удовлетворяющее уравнению

$$\lambda\psi^2\psi^* = i\dot{\psi}.$$

Решением является поле вида

$$\psi = \rho e^{i\omega t}, \qquad (2)$$

где $\omega = -\lambda|\rho|^2$.

1.2 Устойчивость конденсата скалярного поля

$$-\frac{\partial_i^2\psi}{2m} + \lambda\psi^2\psi^* = i\dot{\psi}$$

Положим $\psi = \rho e^{i\omega t} + \varphi$, где $\omega = -\lambda|\rho|^2$, а φ удовлетворяет условию $|\varphi| \ll \rho$:

$$-\frac{\partial_i^2\varphi}{2m} + \lambda(\rho^2 e^{2i\omega t}\varphi^* + 2\rho^2\varphi) = i\dot{\varphi}.$$

Представив φ в виде $f(x,t)e^{i\omega t}$, получим уравнение относительно f

$$-\frac{\partial_i^2 f}{2m} - \omega(f + f^*) = i\dot{f}$$

Решение, согласно [1], представимо в виде $f = \chi(x)e^{i\gamma t} + \eta^*(x)e^{-i\gamma^* t}$. Таким образом, получаем

$$-\frac{\partial_i^2 \chi}{2m}e^{i\gamma t} - \frac{\partial_i^2 \eta^*}{2m}e^{-i\gamma^* t} - \omega(\chi e^{i\gamma t} + \eta^* e^{-i\gamma^* t} + \chi^* e^{-i\gamma^* t} + \eta e^{i\gamma t}) =$$

$$= -\chi\gamma e^{i\gamma t} + \eta^*\gamma^* e^{-i\gamma^* t}.$$

Далее, если γ – не чисто мнимое, данное уравнение переходит в систему

$$\begin{cases} -\dfrac{\Delta\chi}{2m} - \omega\chi - \omega\eta = -\chi\gamma, \\ -\dfrac{\Delta\eta}{2m} - \omega\eta - \omega\chi = \eta\gamma \end{cases} \tag{3}$$

После Фурье-преобразования получаем однородную систему уравнений

$$\begin{cases} A\dfrac{k^2}{2m} - \omega A - \omega B = -A\gamma, \\ B\dfrac{k^2}{2m} - \omega B - \omega A = B\gamma \end{cases} \tag{4}$$

Из условия равенства нулю определителя получаем дисперсионное соотношение

$$(\frac{k^2}{2m} - \omega)^2 - (\gamma^2 + \omega^2) = 0. \tag{5}$$

В случае $\gamma = -\gamma^*, f = \chi(x)e^{i\gamma t}$,

$$-\frac{\Delta\chi}{2m} - \omega(\chi + \chi^*) = -\gamma\chi.$$

Разделяя мнимую и действительную части, получаем

$$\begin{cases} -\dfrac{\Delta u}{2m} - 2\omega u = -v(i\gamma), \\ -\dfrac{\Delta v}{2m} = u(i\gamma). \end{cases}$$

где $\chi = u+iv$. В силу линейности и однородности системы, несмотря на вещественность u и v, решение можно искать в комплексном виде, взяв затем действительную часть решения. Поэтому, вновь применяя Фурье-преобразование, получим систему:

$$\begin{cases} A\dfrac{k^2}{2m} - 2\omega A = -B(i\gamma), \\ B\dfrac{k^2}{2m} = A(i\gamma). \end{cases} \tag{6}$$

Её определитель равен

$$d = \theta^2 - 2\omega\theta - \gamma^2,$$

и, приравнивая его к нулю, мы снова приходим к выражению 5, откуда следует, что оба случая можно рассматривать одновременно. Перепишем выражение 5 в виде

$$\gamma^2 = (\frac{k^2}{2m} - \omega)^2 - \omega^2 \tag{7}$$

Периодичность требует, чтобы k было вещественным, откуда следует, что γ^2 может принимать отрицательные значения при $\omega > 0$, откуда будет следовать неустойчивость конденсата. При $\omega \leq 0$ γ^2 отрицательных значений принимать не может, откуда будет следовать устойчивость конденсата.

Вспоминая, что $\omega = -\lambda|\rho|^2$, получим, что при $\lambda < 0$ конденсат рассматриваемого скалярного поля неустойчив, а при $\lambda \geq 0$ – устойчив.

1.3 Сферически симметричные решения

Предложим еще один способ отыскания конденсатного решения поля: будем искать решения уравнения 1 вида $f(r)e^{i\omega t}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. После подстановки имеем уравнение относительно f:

$$\frac{f''}{2m} = -\frac{d-1}{2mr}f' + \lambda f^3 + \omega f,$$

которое можно записать в виде

$$\frac{f''}{2m} = -\frac{d-1}{2mr}f' - \frac{\partial}{\partial f}(-\frac{\lambda}{4}f^4 - \frac{\omega}{2}f^2).$$

Данное уравнение можно интерпретировать как уравнение движения материальной точки в потенциале $U(f) = -\frac{\lambda}{4}f^4 - \frac{\omega}{2}f^2$, под f понимая координату точки, а под r – время. Тогда конденсатные решения легко находятся как точки покоя в данном потенциале.

Заметим, что при $\lambda < 0$ и $\omega > 0$ потенциал имеет локальный максимум в нуле, а на бесконечности возрастает. Таким образом, уравнение в данном случае допускает решение в виде Q-шаров, с чем может быть связана неустойчивость конденсата.

1.4 Джинсовская длина волны скалярного конденсата

Вернемся еще раз к выражению 5 и перепишем его в виде:

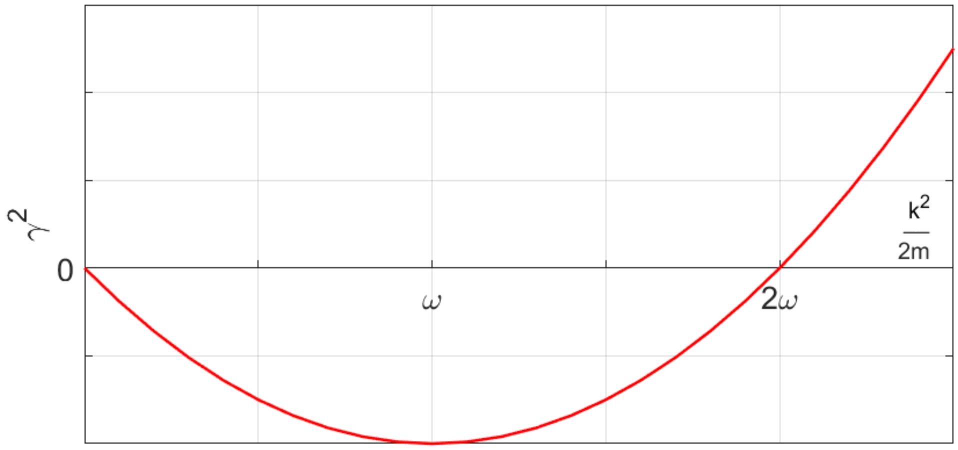
$$\gamma^2 = (\frac{k^2}{2m} - \omega)^2 - \omega^2$$

и рассмотрим зависимость γ^2 от k^2 при $\omega > 0$, т.е. в случае неустойчивости конденсата.

Минимально возможное k, при котором еще наблюдается устойчивость конденсата (т.е. которому соответствует положительное γ^2) и будет соответствовать джинсовской длине волны. Из рисунка видно, что конденсат устойчив при $\frac{k^2}{2m} \geq 2\omega$. Таким образом, $k_J = \frac{2\pi}{\lambda_J} = \sqrt{4m\omega}$, и, вспоминая, что $\omega = |\lambda|\rho^2$ при $\lambda < 0$, для джинсовской длины волны окончательно получаем:

$$\lambda_J = \frac{\pi}{\rho\sqrt{m|\lambda|}}.$$

Рис. 1: Вид зависимости $\gamma^2(k)$



2 Релятивистское скалярное поле

Рассмотрим поле с лагранжианом:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi \Phi^* - \frac{\lambda}{2} (\Phi \Phi^*)^2$$

и, соответственно, уравнением:

$$\partial_\mu \partial^\mu \Phi + m^2 \Phi + \lambda \Phi^2 \Phi^* = 0.$$

Нерелятивистское уравнение 1 получается заменой $\Phi = \frac{1}{\sqrt{2m}} \psi e^{-imt}$ в предположении достаточно медленной зависимости ψ от времени в виде $e^{i\omega t}$, так что $\omega \ll m$:

$$-\frac{\partial_i \partial^i \psi}{2m} + \frac{\lambda}{(2m)^2} \psi^2 \psi^* = i\dot{\psi}.$$

Таким образом, λ_ψ из уравнения 1 равно $\frac{\lambda}{(2m)^2}$.

Конденсатное решение в релятивистской теории будет выглядеть следующим образом:

$$\Phi_0 = \rho e^{i\omega t},$$

где $\omega^2 = m^2 + \lambda\rho^2$.

Отсюда видно, что при $\lambda\rho^2 < -m^2$ конденсат заведомо неустойчив. Так как этого результата в нерялитивистской теории обнаружено не было, можно сделать вывод, что релятивистский конденсат будет переходить в нерелятивистский только при $|\lambda\rho^2| \ll m^2$.

Для проверки на неустойчивость добавим к конденсатному решению малые возмущения φ, считая, что $|\varphi| \ll \rho$:

$$\partial_\mu\partial^\mu\Phi_0 + \partial_\mu\partial^\mu\varphi + m^2\Phi_0 + m^2\varphi + \lambda(\Phi_0 + \varphi)^2(\Phi_0^* + \varphi^*) = 0.$$

После замены $\varphi = f(x,t)e^{i\omega t}$ получим:

$$\ddot{f} + 2i\omega\dot{f} - f'' + \lambda\rho^2(f + f^*) = 0.$$

Найдем моды, отвечающие непосредственно за неустойчивость. Для этого сделаем замену $f = \chi(x)e^{\gamma t}$, где γ – вещественное:

$$-\chi'' + \gamma^2\chi + 2i\omega\gamma\chi + \lambda\rho^2(\chi + \chi^*) = 0.$$

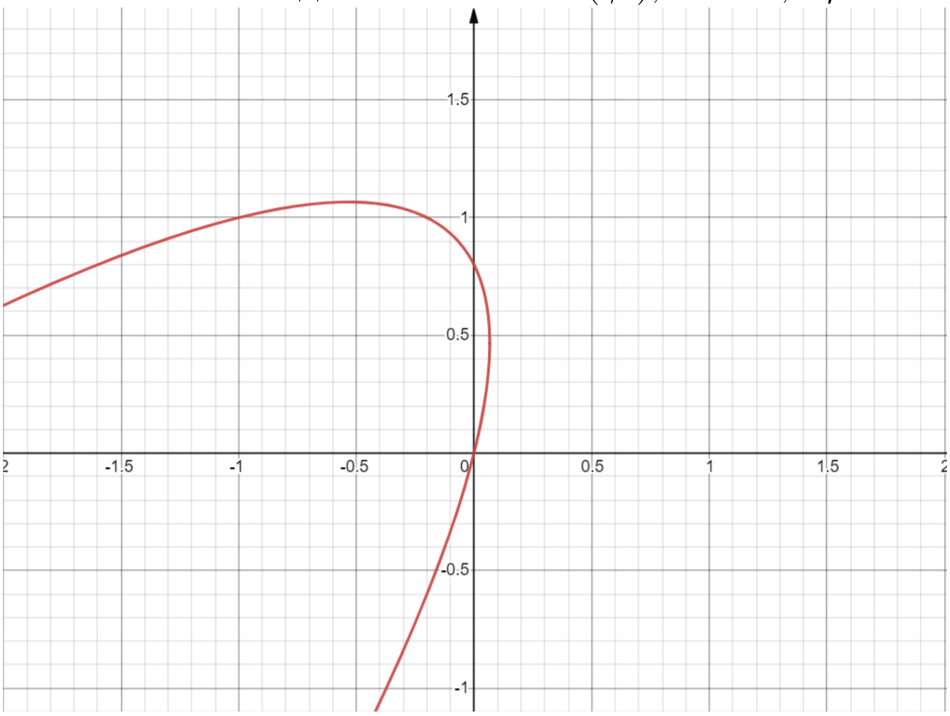
Разделяя действительную и мнимую части и решая аналагично предыдущему разделу, приходим к дисперсионному соотношению для k и γ:

$$k^2 = \gamma^2 - \lambda\rho^2 \pm \sqrt{(\lambda\rho^2)^2 - 4\omega^2\gamma^2}.$$

При $\lambda < 0$ возможно существование одновременно положительных k^2 и γ^2, а при $\lambda > 0$ – невозможно. Этот результат совпадает с результатом для нерелятивистского поля. Рассмотрим зависимость k^2 от γ^2 при $\lambda < 0$. Её график представлен на рисунке. При достаточно малых $\lambda\rho^2$ по сравнению с m максимальное значение k будет при $\gamma = 0$. Таким образом,

$$\lambda_J = \frac{2\pi}{\sqrt{2|\lambda|\rho^2}},$$

Рис. 2: Вид зависимости $k^2(\gamma^2)$, $m = 1$, $\lambda\rho^2 = -0.4$



а в терминах констант нерелятивистского поля получим:

$$\lambda_J = \frac{\pi}{\sqrt{m|\lambda_\psi|\rho_\psi^2}},$$

что совпадает с джинсовской длиной волны, полученной для нерелятивистского конденсата ранее.

3 Векторное комплексное поле с потенциалом 4-го порядка

Пусть лагранжиан поля имеет вид

$$\mathcal{L} = i\psi_i^* \dot{\psi}^i - \frac{|\nabla\psi_i|^2}{2m} - V,$$

где $V = \dfrac{\alpha}{2}(\psi_i \psi^{*i})^2 + \dfrac{\beta}{2}(\psi_i^* \psi^{*i})(\psi_j \psi^j), \quad i, j = 1,\, 2,\, 3.$

После варьирования по ψ_k^* получаем уравнения векторного поля

$$\begin{aligned} &-\frac{\Delta\psi_k}{2m} + \alpha(\psi_j \psi^{j*})\psi_k + \beta(\psi_j \psi^j)\psi_k^* = i\dot{\psi}_k, \\ &k = 1,\, 2,\, 3. \end{aligned} \tag{8}$$

3.1 Конденсатное решение

Оно должно удовлетворять уравнениям

$$\alpha(\psi_j \psi^{j*})\psi_k + \beta(\psi_j \psi^j)\psi_k^* = i\dot{\psi}_k.$$

Решение будем искать в виде $\psi_{0k} = \rho_k e^{i\varphi_k}$, где $\rho_k(t)$ и $\varphi_k(t)$ – действительные функции. После подстановки данного выражения получим

$$\alpha\rho_k(\rho_1^2+\rho_2^2+\rho_3^2)+\beta\rho_k(\rho_1^2 e^{2i(\varphi_1-\varphi_k)}+\rho_2^2 e^{2i(\varphi_2\varphi_k)}+\rho_3^2 e^{2i(\varphi_3\varphi_k)}) = i\dot{\rho}_k - \rho\dot{\varphi}_k, \tag{9}$$

причем по j здесь и в дальнейшем будет предполагаться суммирование квадратов индексированных выражений.

Потребуем $\rho_i = const$. Отсюда следует, что $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3$, причем $\dot{\varphi}_k = -(\alpha + \beta)(\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2) = \omega$.

Конденсатное решение имеет, таким образом, вид

$$\psi_{0k} = \rho_k e^{i(\omega t + \varphi_0)}.$$

3.2 Устойчивость конденсата векторного поля

Для проверки полученного решения на устойчивость добавим к нему малые возмущения φ_k, такие, что $|\varphi_k|^2 \ll \rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2$:

$$\psi_k = \psi_{0k} + \varphi_k,$$

и подставим данные выражения в уравнения 8

$$-\frac{\Delta\varphi_k}{2m} + \alpha(\psi_{0k}+\varphi_k)(\psi_{0j}+\varphi_j)(\psi_0^{j*}+\varphi^{j*}) + \beta(\psi_{0k}^*+\varphi_k^*)(\psi_{0j}+\varphi_j)(\psi_0^j+\varphi^j) = i(\dot\psi_{0k}+\dot\varphi_k).$$

Учитывая, что ψ_{0i} удовлетворяют уравнениям 8, и пренебрегая слагаемыми высших по модулю φ_k порядков, получим

$$-\frac{\Delta\varphi_k}{2m} + \alpha\rho_k(\rho_j\varphi^{j*}e^{2i\omega t} + \rho_j\varphi^j) + \alpha\rho^2\varphi_k + 2\beta\rho_k\rho_j\varphi^j + \beta\rho^2\varphi_k^* e^{2i\omega t} = i\dot\varphi_k,$$

где $\rho^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2$.

Подставим $\varphi_k = \rho_k f_k(x,t)e^{i\omega t}$, после чего получим

$$-\frac{\Delta f_k}{2m} + (\alpha+2\beta)(\rho_1^2 f_1 + \rho_2^2 f_2 + \rho_3^2 f_3) + \alpha(\rho_1^2 f_1^* + \rho_2^2 f_2^* + \rho_3^2 f_3^*) + \beta\rho^2(f_k^* - f_k) = i\dot f_k. \tag{10}$$

Решение, согласно [1], представимо в виде

$$f_k = \chi_k(x)e^{i\gamma t} + \eta_k^*(x)e^{-i\gamma^* t}.$$

Заметим, что если γ может принимать комплексные значения, то решение неустойчиво. Для устойчивости необходимо, чтобы γ было вещественным.

После подстановки имеем

$$\begin{cases} -\dfrac{\Delta\chi_k}{2m} + (\alpha+2\beta)(\rho_1^2\chi_1 + \rho_2^2\chi_2 + \rho_3^2\chi_3) + \alpha(\rho_1^2\eta_1 + \rho_2^2\eta_2 + \rho_3^2\eta_3) + \beta\rho^2(\eta_k - \chi_k) = -\gamma\chi_k, \\ -\dfrac{\Delta\eta_k}{2m} + (\alpha+2\beta)(\rho_1^2\eta_1 + \rho_2^2\eta_2 + \rho_3^2\eta_3) + \alpha(\rho_1^2\chi_1 + \rho_2^2\chi_2 + \rho_3^2\chi_3) + \beta\rho^2(\chi_k - \eta_k) = \gamma\eta_k. \end{cases} \tag{11}$$

После преобразования Фурье в случае двумерного поля получим однородную систему со следующей матрицей:

$$\begin{pmatrix} \theta + (\alpha+2\beta)\rho_1^2 - \beta\rho^2 + \gamma & \alpha\rho_1^2 + \beta\rho^2 & (\alpha+2\beta)\rho_2^2 & \alpha\rho_2^2 \\ \alpha\rho_1^2 + \beta\rho^2 & \theta + (\alpha+2\beta)\rho_1^2 - \beta\rho^2 - \gamma & \alpha\rho_2^2 & (\alpha+2\beta)\rho_2^2 \\ (\alpha+2\beta)\rho_1^2 & \alpha\rho_1^2 & \theta + (\alpha+2\beta)\rho_2^2 - \beta\rho^2 + \gamma & \alpha\rho_2^2 + \beta\rho^2 \\ \alpha\rho_1^2 & (\alpha+2\beta)\rho_1^2 & \alpha\rho_2^2 + \beta\rho^2 & \theta + (\alpha+2\beta)\rho_1^2 - \beta\rho_2^2 - \gamma \end{pmatrix},$$

где $\theta = \dfrac{k^2}{2m}$ (k - волновое число).

К первой строке прибавим вторую и вычтем третью и четвертую.

$$\begin{pmatrix} \theta + \gamma & \theta - \gamma & -\theta - \gamma & -\theta + \gamma \\ \alpha\rho_1^2 + \beta\rho^2 & \theta + (\alpha+2\beta)\rho_1^2 - \beta\rho^2 - \gamma & \alpha\rho_2^2 & (\alpha+2\beta)\rho_2^2 \\ (\alpha+2\beta)\rho_1^2 & \alpha\rho_1^2 & \theta + (\alpha+2\beta)\rho_2^2 - \beta\rho^2 + \gamma & \alpha\rho_2^2 + \beta\rho^2 \\ \alpha\rho_1^2 & (\alpha+2\beta)\rho_1^2 & \alpha\rho_2^2 + \beta\rho^2 & \theta + (\alpha+2\beta)\rho_1^2 - \beta\rho_2^2 - \gamma \end{pmatrix},$$

Прибавим к третьему столбцу первый (и пятый, в трехмерном случае), а к четвертому второй (и шестой, в трехмерном случае)

$$\begin{pmatrix} \theta + \gamma & \theta - \gamma & 0 & 0 \\ \alpha\rho_1^2 + \beta\rho^2 & \theta + (\alpha+2\beta)\rho_1^2 - \beta\rho^2 - \gamma & (\alpha+\beta)\rho^2 & \theta + (\alpha+\beta)\rho^2 - \gamma \\ (\alpha+2\beta)\rho_1^2 & \alpha\rho_1^2 & \theta + (\alpha+\beta)\rho^2 + \gamma & (\alpha+\beta)\rho^2 \\ \alpha\rho_1^2 & (\alpha+2\beta)\rho_1^2 & (\alpha+\beta)\rho^2 & \theta + (\alpha+\beta)\rho^2 - \gamma \end{pmatrix}.$$

Затем вычтем из второй строки четвертую (а в трехмерном случае ещё из третьей пятую и из четвертой шестую). Данные преобразования приведут к матрице, определитель которой равен произведению двух (трех) определителей второго порядка.

Запишем условие существования нетривиального решения системы в случае трехмерного поля:

$$[\theta^2 - 2\beta\rho^2\theta - \gamma^2]^2 \times [\theta^2 + 2(\alpha+\beta)\rho^2\theta - \gamma^2] = 0 \qquad (12)$$

Это условие определяет два возможных дисперсионных соотношения:

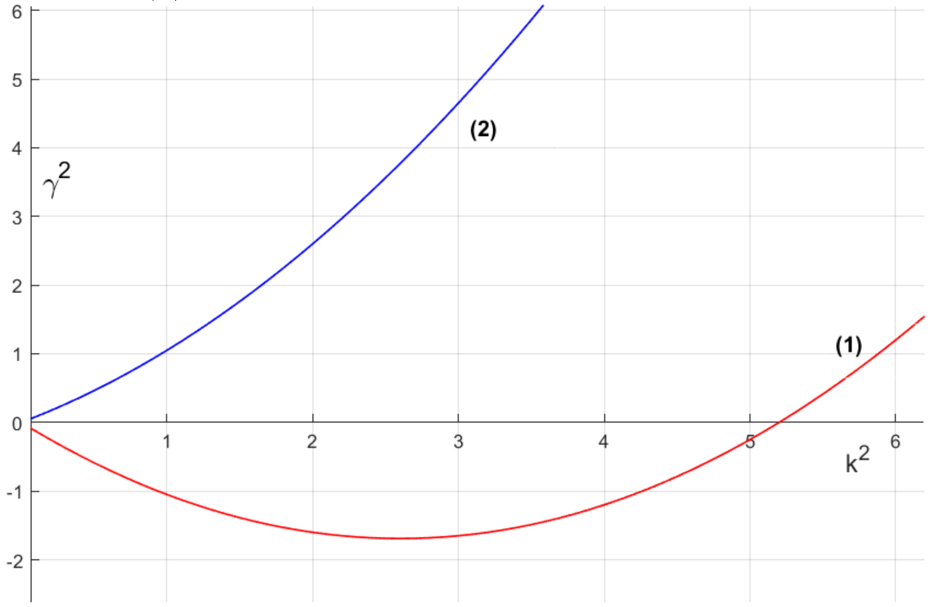
$$\gamma^2 = [\frac{k^2}{2m} - \beta\rho^2]^2 - \beta^2\rho^4, \qquad (13)$$

$$\gamma^2 = [\frac{k^2}{2m} + (\alpha+\beta)\rho^2]^2 - (\alpha+\beta)^2\rho^4. \qquad (14)$$

Отсюда видно, что при $\beta > 0$ или $(\alpha+\beta) < 0$ появляется возможность для γ быть комплексной величиной, что означает неустойчивость конденсата при данных параметрах.

В случае $\beta \leq 0,\ (\alpha+\beta) \geq 0$ конденсат рассматриваемого поля является устойчивым.

Рис. 3: Вид зависимостей $\gamma^2(k^2)$, красная отвечает соотношению 13, синяя – соотношению 14,
$m = 1,\ \rho = 1,\ \alpha = -0.5,\ \beta = 1.3$



3.3 Джинсовская длина волны векторного конденсата

Рассмотрим, аналогично разделу 1.4, теперь уже две зависимости $\gamma^2(k)$:

$$\gamma^2 = \theta(\theta - 2\beta\rho^2),$$

$$\gamma^2 = \theta(\theta + 2(\alpha + \beta)\rho^2), \qquad \theta = \frac{k^2}{2m}.$$

Аналагично разделу 1.4 находится выражение для джинсовской длины волны векторного конденсата:

$\lambda_J = \dfrac{\pi}{\rho\sqrt{m\beta}}$ в случае $\beta > 0,\ \alpha + \beta > 0,$

$\lambda_J = \dfrac{\pi}{\rho\sqrt{-m(\alpha+\beta)}}$ в случае $\beta < 0,\ \alpha + \beta < 0,$

$\lambda_J = min(\dfrac{\pi}{\rho\sqrt{m\beta}}, \quad \dfrac{\pi}{\rho\sqrt{-m(\alpha+\beta)}})$ в случае $\beta > 0,\ \alpha + \beta < 0.$

Список литературы

[1] IE Gulamov, E Ya Nugaev, and MN Smolyakov. Analytic q-ball solutions and their stability in a piecewise parabolic potential. *Physical Review D*, 87(8):085043, 2013.

[2] E Ya Nugaev and AV Shkerin. Review of nontopological solitons in theories with u (1)-symmetry. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 130(2):301–320, 2020.

[3] Дмитрий Сергеевич Горбунов and Валерий Анатольевич Рубаков. *Введение в теорию ранней Вселенной. Теория горячего Большого взрыва*. Российская акад. наук, Ин-т ядерных исслед., 2007.

[4] Валерий Анатольевич Рубаков. Классические калибровочные поля. *М.: Эдиториал УРСС*, 1999.